

Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна
Факультет математики і інформатики
Кафедра прикладної математики

**Кваліфікаційна робота
бакалавра**

на тему **«Стабілізація одного класу нелінійних
систем з виходом»**

Виконав: студент групи МП41 IV курсу
(перший бакалаврський рівень),
спеціальності 113
“Прикладна математика”
освітньої програми
“Прикладна математика”
Бельмас С.С.

Керівник: кандидат фіз.-мат. наук,
доцент кафедри
прикладної математики
Бєбія М.О.

Рецензент: кандидат фіз.-мат. наук,
науковий співробітник
відділу математичної фізики
Фізико-технічного інституту
низьких температур
імені Б. І. Веркіна НАН України
Гукалов О.О.

Анотації

Бельмас Сергій. Стабілізація одного класу нелінійних систем з виходом. У цій роботі вивчається задача стабілізації одного класу нелінійних систем з виходом. Для аналізу стійкості використано метод функції Ляпунова. Знаходження функції Ляпунова та стабілізуючого керування ґрунтується на методі покрокової стабілізації (бекстепінгу). Побудовано спостерігач для оцінки невимірюваної змінної. Проведено комп'ютерну симуляцію для демонстрації ефективності отриманого підходу.

Ключові слова: стабілізація, нелінійні системи з виходом, керування динамічними системами, методи стабілізації, теорія керування, метод функції Ляпунова.

Belmas Serhii. Output stabilization of a class of nonlinear systems. The problem of stabilizing a certain class of nonlinear systems with output is studied in this work. The Lyapunov function method is employed for the stability analysis. The construction of the Lyapunov function and the stabilizing control law is based on the backstepping technique. An observer is designed to estimate an unmeasured state variable. A computer simulation is performed to verify the effectiveness of the proposed control scheme.

Keywords: stabilization, nonlinear systems with output, dynamic systems control, stabilization methods, control theory, Lyapunov function method.

Зміст

Вступ	4
1. Постановка задачі	6
2. Розробка закону керування	7
3. Побудова спостерігача	11
4. Узагальнення задачі на випадок двох доданків	14
5. Числове моделювання	20
5.1. Приклад 1	20
5.2. Приклад 2	24
Висновки	28
Список використаних джерел	29

Вступ

У сучасній теорії керування нелінійними системами [1–6] особливе місце займають задачі стабілізації систем з виходом. Такі системи часто зустрічаються в різноманітних галузях, включаючи робототехніку, хімічні процеси, аерокосмічні та електромеханічні системи.

Історично проблема стабілізації систем з неповною інформацією про стан виникла ще в межах класичної лінійної теорії керування, де було закладено поняття спостережуваності. Подальший розвиток теорії просунувся в бік нелінійних моделей. Одним із ключових підходів у таких задачах стало поєднання стабілізації з оцінюванням стану за допомогою спостерігачів, які відтворюють невідомі змінні на основі доступних вимірювань.

Особливу увагу вивченню нелінійних систем приділили в працях, де застосовувались бекстепінг, а також побудова спостерігачів для оцінки невимірюваних станів [1, 2, 6]. Важливим кроком стала поява методу бекстепінг [2], який заснований на покроковій побудові функцій Ляпунова та стабілізуючих керувань для підсистем меншої розмірності. Цей метод добре зарекомендував себе в задачах, де необхідна гнучка структура керування, здатна адаптуватись до особливостей системи.

В останні десятиліття активно розвиваються також підходи до стабілізації суттєво нелінійних систем з некерованим нестійким першим наближенням [3–5] без використання рекурентної побудови функції Ляпунова та керування, що дозволяє будувати прості класи керувань для систем високої розмірності. У цих роботах розглядалися конкретні класи систем — наприклад, з поліноміальною або степеневою нелінійністю, що дозволяло отримати гарантії стійкості.

У цій роботі розглядається задача стабілізації двовимірної системи з нелінійністю та невимірюваними станами. Розв'язок отримано з використанням методу бекстепінгу. Спочатку побудовано керування, що залежить від усіх фазових координат системи. Потім, з використанням спостерігача для невимірюваних компонентів стану системи, отримано стабілізуюче керування. Таким чином, спостерігач дозволив оцінити внутрішні змінні системи, що недоступні для прямого вимірювання. Наведено модельні приклади, що наочно демонструють ефективність отриманого керування.

Розділ 1

Постановка задачі

Розглянемо систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = u, \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1.1)$$

де:

- $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ — стан системи,
- $u \in \mathbb{R}$ — керування,
- $f_1(x_1)$ — неперервно диференційовна функція, $f_1(0) = 0$,
- y — вимірювана величина (вихід).

Припущення 1.1. Будемо вважати, що виконується наступна нерівність

$$|f_1(x_1)| \leq |x_1|k_1(x_1), \quad (1.2)$$

де $k_1(x_1)$ — це відома невід’ємна гладка функція.

Мета: Розробити закон керування, що забезпечить глобальну асимптотичну стійкість нульової точки спокою (НТС) системи в такому вигляді:

$$\begin{cases} \dot{z} = \eta(z, y), & z \in \mathbb{R}, \\ u = u(z, y). \end{cases}$$

Розділ 2

Розробка закону керування

Спочатку побудуємо керування, що залежить від усіх змінних системи. Скористуємось методом рекурентної стабілізації — бекстепінгом [2], який дозволяє побудувати функцію Ляпунова та стабілізуюче керування.

Розглянемо окремо перше рівняння системи, яке запишемо у вигляді

$$\dot{x}_1 = x_2^* + x_2 - x_2^* + f_1(x_1). \quad (2.1)$$

Будемо дивитись на x_2^* як на допоміжне керування. Знайдемо x_2^* як функцію від x_1 так, щоб стабілізувати нульову точку спокою рівняння

$$\dot{x}_1 = x_2^* + f_1(x_1). \quad (2.2)$$

Візьмемо функцію Ляпунова для рівнянь (2.1) та (2.2) у вигляді

$$V_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2.$$

Виберемо наступне допоміжне керування $x_2^* = -x_1(2 + k_1(x_1))$, тоді похідна функції $V_1(x_1)$ в силу системи (2.2) прийме вигляд

$$\dot{V}_1(x_1) = x_1 \dot{x}_1 = x_1(x_2^* + f_1(x_1)) \leq -2x_1^2 - x_1^2 k_1(x_1) + x_1^2 k_1(x_1) = -2x_1^2 < 0$$

при $x_1 \neq 0$. Отже, керування $x_2^* = -x_1(2 + k_1(x_1))$ стабілізує НТС системи (2.2).

Використаємо знайдене допоміжне керування x_2^* для стабілізації вихід-

ної системи. Повернемося до першого рівняння вихідної системи (1.1), яке має вигляд (2.1). Знайдемо похідну функції $V_1(x_1)$ в силу рівняння (2.1):

$$\dot{V}_1(x_1) = x_1 \dot{x}_1 = x_1(x_2^* + x_2 - x_2^* + f_1(x_1)).$$

Перепишемо у вигляді

$$\dot{V}_1(x_1) = x_1(x_2 - x_2^* + f_1(x_1)) + x_1 x_2^*.$$

Використаємо (1.2), що дає:

$$\dot{V}_1(x_1) \leq x_1(x_2 - x_2^*) + x_1^2 k_1(x_1) + x_1(-x_1(2 + k_1(x_1))),$$

$$\dot{V}_1(x_1) \leq -2x_1^2 + x_1(x_2 - x_2^*).$$

Розглянемо наступну функцію Ляпунова для системи з двох рівнянь (1.1):

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_2^*)^2.$$

Тоді

$$\dot{V}_2 = -2x_1^2 + x_1(x_2 - x_2^*) + (x_2 - x_2^*)(u - \dot{x}_2^*).$$

Запишемо у вигляді

$$\dot{V}_2 = -2x_1^2 + x_1(x_2 - x_2^*) + (x_2 - x_2^*) \left(u - \frac{dx_2^*}{dx_1}(x_2 + f_1(x_1)) \right).$$

З використанням умови (1.2) отримуємо

$$\dot{V}_2 \leq -2x_1^2 + x_1(x_2 - x_2^*) + (x_2 - x_2^*)u + |x_2 - x_2^*| \left| \frac{dx_2^*}{dx_1} \right| (|x_2| + |x_1|k_1(x_1)).$$

Зауважимо, що

$$\left| \frac{dx_2^*}{dx_1} \right| (1 + k_1(x_1)) = |2 + k_1(x_1) + x_1 k_1'(x_1)| (1 + k_1(x_1)).$$

Далі користуємось нерівністю

$$|x_2| \leq |x_2 - x_2^*| + |x_2^*| = |x_2 - x_2^*| + |x_1|(2 + k_1(x_1)).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -2x_1^2 + (x_2 - x_2^*)u + x_1(x_2 - x_2^*) + |x_2 - x_2^*| \left(|x_2 - x_2^*| \right. \\ & \left. + |x_1|(3 + k_1(x_1)) \right) |2 + k_1(x_1) + x_1 k_1'(x_1)| (1 + k_1(x_1)) \end{aligned}$$

або, після перетворення, маємо

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -2x_1^2 + (x_2 - x_2^*)u + (x_2 - x_2^*)^2 |2 + k_1(x_1) + x_1 k_1'(x_1)| (1 + k_1(x_1)) \\ & + |x_1| |x_2 - x_2^*| \left((3 + k_1(x_1)) |2 + k_1(x_1) + x_1 k_1'(x_1)| (1 + k_1(x_1)) + 1 \right). \end{aligned}$$

Відмітимо, що

$$ab = (\sqrt{2}a) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}b \right) \leq \frac{1}{2} \left((\sqrt{2}a)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}b \right)^2 \right) = a^2 + \frac{1}{4}b^2$$

для будь-яких дійсних a та b . Звідки отримаємо нерівність:

$$\begin{aligned} & |x_1| |x_2 - x_2^*| \left((3 + k_1(x_1)) |2 + k_1(x_1) + x_1 k_1'(x_1)| (1 + k_1(x_1)) + 1 \right) \\ & \leq x_1^2 + \frac{1}{4}(x_2 - x_2^*)^2 \left((3 + k_1(x_1)) |2 + k_1(x_1) + x_1 k_1'(x_1)| (1 + k_1(x_1)) + 1 \right)^2. \end{aligned}$$

Тоді:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -x_1^2 + (x_2 - x_2^*)u + (x_2 - x_2^*)^2 |2 + k_1(x_1) + x_1 k_1'(x_1)| (1 + k_1(x_1)) \\ & + \frac{1}{4}(x_2 - x_2^*)^2 \left((3 + k_1(x_1)) |2 + k_1(x_1) + x_1 k_1'(x_1)| (1 + k_1(x_1)) + 1 \right)^2. \end{aligned}$$

В еквівалентній формі остання нерівність має вигляд

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -x_1^2 + (x_2 - x_2^*)u + (x_2 - x_2^*)^2 \left(|2 + k_1(x_1) + x_1 k_1'(x_1)| (1 + k_1(x_1)) \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \left((3 + k_1(x_1)) |2 + k_1(x_1) + x_1 k_1'(x_1)| (1 + k_1(x_1)) + 1 \right)^2 \right) \end{aligned}$$

або

$$\dot{V}_2 \leq -x_1^2 + (x_2 - x_2^*)u + (x_2 - x_2^*)^2 \beta_1(x_1),$$

де $\beta_1(x_1) > 0$ — неперервна і така, що

$$\begin{aligned} \beta_1(x_1) \geq & |2 + k_1(x_1) + x_1 k_1'(x_1)| (1 + k_1(x_1)) \\ & + \frac{1}{4} \left((3 + k_1(x_1)) |2 + k_1(x_1) + x_1 k_1'(x_1)| (1 + k_1(x_1)) + 1 \right)^2. \end{aligned}$$

Виберемо керування $u = u(x_1, x_2)$, де

$$u(x_1, x_2) = -(x_2 - x_2^*)(1 + \beta_1(x_1)), \quad (2.3)$$

тоді отримаємо

$$\dot{V}_2|_{u=u(x_1, x_2)} \leq -x_1^2 - (x_2 - x_2^*)^2 < 0 \quad (2.4)$$

при $|x_1| + |x_2| \neq 0$. Згідно з методом функції Ляпунова НТС системи (1.1) є глобально асимптотично стійкою.

Знайдене стабілізуюче керування $u(x_1, x_2)$ вигляду (2.3) залежить від невимірюваної величини x_2 . На його основі в наступному розділі буде побудовано керування, що не залежить від x_2 .

Розділ 3

Побудова спостерігача

Ми маємо задачу побудувати керування, що залежить тільки від x_1 , тому побудуємо такий спостерігач

$$\dot{z} = u - \frac{dL(x_1)}{dx_1}(z + L(x_1) + f_1(x_1)),$$

де $L(x_1)$ — це нелінійна функція ($L(0) = 0$), що буде визначена пізніше, та $\frac{dL(x_1)}{dx_1} > 0$.

Нехай $e = x_2 - L(x_1) - z$, тоді

$$\dot{e} = u - \frac{dL(x_1)}{dx_1}(x_2 + f_1(x_1)) - (u - \frac{dL(x_1)}{dx_1}(z + L(x_1) + f_1(x_1)))$$

або

$$\dot{e} = -\frac{dL(x_1)}{dx_1}e.$$

Введемо до розгляду функцію Ляпунова $V_3 = \frac{1}{2}e^2$, її похідна в силу вище згаданого рівняння:

$$\dot{V}_3 = e\dot{e} = -e^2\frac{dL(x_1)}{dx_1} < 0$$

при $e \neq 0$, $\frac{dL(x_1)}{dx_1} > 0$. Отже, $e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$.

Використаємо керування (2.3) для побудови нового керування, що не залежить явно від x_2 . Через те, що x_2 недоступно для використання в керуванні, ми замінюємо її на $z + L(x_1)$ в (2.3):

$$u(x_1, L(x_1) + z) = -(z + L(x_1) - x_2^*)(1 + \beta_1(x_1)). \quad (3.1)$$

Ми взяли нове керування, тому нерівність (2.4) змінюється на

$$\dot{V}_2|_{u=u(x_1, L(x_1)+z)} \leq -x_1^2 - (x_2 - x_2^*)^2 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}(u(x_1, L(x_1) + z) - u(x_1, x_2))$$

або, в еквівалентному вигляді,

$$\begin{aligned} \dot{V}_2|_{u=u(x_1, L(x_1)+z)} &\leq -x_1^2 - (x_2 - x_2^*)^2 \\ &\quad + (x_2 - x_2^*) \left(-(z + L(x_1) - x_2^*) + x_2 - x_2^* \right) (1 + \beta_1(x_1)) \end{aligned}$$

чи просто

$$\dot{V}_2|_{u=u(x_1, L(x_1)+z)} \leq -x_1^2 - (x_2 - x_2^*)^2 + |x_2 - x_2^*|e|(1 + \beta_1(x_1)).$$

Використовуємо нерівність

$$|x_2 - x_2^*|e|(1 + \beta_1(x_1)) \leq \frac{1}{2}(x_2 - x_2^*)^2 + \frac{1}{2}e^2(1 + \beta_1(x_1))^2,$$

тоді отримуємо

$$\dot{V}_2|_{u=u(x_1, L(x_1)+z)} \leq -x_1^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_2^*)^2 + \frac{1}{2}e^2(1 + \beta_1(x_1))^2.$$

Складемо $\dot{V}_3$ та $\dot{V}_2|_{u=u(x_1, L(x_1)+z)}$, що дає

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 + \dot{V}_2|_{u=u(x_1, L(x_1)+z)} &\leq -x_1^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_2^*)^2 + \frac{1}{2}e^2(1 + \beta_1(x_1))^2 - e^2 \frac{dL(x_1)}{dx_1} \\ &= -x_1^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_2^*)^2 - e^2 \left(\frac{dL(x_1)}{dx_1} - \frac{1}{2}(1 + \beta_1(x_1))^2 \right). \end{aligned}$$

Визначимо $L(x_1)$ як

$$L(x_1) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2} \int_0^{x_1} (1 + \beta_1(s))^2 ds.$$

Тоді

$$\dot{V}_3 + \dot{V}_2|_{u=u(x_1, L(x_1)+z)} \leq -x_1^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_2^*)^2 - \frac{1}{2}e^2 < 0.$$

Як і раніше, скористуємось методом функції Ляпунова.

Зазначимо, що $V_2 + V_3 > 0$, при $|x_1| + |x_2| + |z| \neq 0$ тому НТС системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = u(x_1, L(x_1) + z), \\ \dot{z} = u(x_1, L(x_1) + z) - \frac{dL(x_1)}{dx_1}(z + L(x_1) + f_1(x_1)) \end{cases}$$

є глобально асимптотично стійкою. Стабілізуюче керування (3.1) має вигляд

$$\begin{aligned} u(x_1, L(x_1) + z) &= -(z + L(x_1) - x_2^*)(1 + \beta_1(x_1)) \\ &= -(z + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2} \int_0^{x_1} (1 + \beta_1(s))^2 ds + x_1(2 + k(x_1)))(1 + \beta_1(x_1)), \end{aligned}$$

де $\beta_1(x_1) > 0$ визначено в розділі 2.

Розділ 4

Узагальнення задачі на випадок двох доданків

Розглянемо узагальнену систему такого виду:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = u + f_2(x_1, x_2), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (4.1)$$

Ця система відрізняється від системи (1.1) наявністю доданку $f_2(x_1, x_2)$ в правій частині. $f_2(x_1, x_2)$ — неперервно диференційовна функція, що не обов’язково відома заздалегідь, $f_2(0, 0) = 0$.

Припущення 4.1. Будемо вважати, що виконується наступна нерівність

$$|f_2(x_1, x_2)| \leq (|x_1| + |x_2|)k_2(x_1), \quad (4.2)$$

де $k_2(x_1)$ — відома невід’ємна гладка функція.

Розробка закону керування

Аналогічно до розділу 2, знайдемо спочатку керування, що залежить від x_1 та x_2 . Перше рівняння системи (4.1) таке ж саме, як і перше рівняння системи (1.1), отже функція Ляпунова для нього

$$\dot{V}_1(x_1) \leq -2x_1^2 + x_1(x_2 - x_2^*),$$

де $x_2^* = -x_1(2 + k_1(x_1))$.

Розглянемо функцію Ляпунова для вихідної системи з двох рівнянь (4.1):

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2}(x_2 - x_2^*)^2.$$

Звідки маємо

$$\dot{V}_2 = -2x_1^2 + x_1(x_2 - x_2^*) + (x_2 - x_2^*)(u + f_2(x_1, x_2) - \dot{x}_2^*).$$

Перепишемо у вигляді

$$\dot{V}_2 = -2x_1^2 + x_1(x_2 - x_2^*) + (x_2 - x_2^*)(u + f_2(x_1, x_2) - \frac{dx_2^*}{dx_1}(x_2 + f_1(x_1))).$$

Використаємо умови (1.2) та (4.2), отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -2x_1^2 + x_1(x_2 - x_2^*) + (x_2 - x_2^*)u + |x_2 - x_2^*|(|x_1| + |x_2|)k_2(x_1) + \\ & |x_2 - x_2^*| \left| \frac{dx_2^*}{dx_1} \right| (|x_2| + |x_1|k_1(x_1)). \end{aligned}$$

Оберемо будь-яке неперевне $\alpha_2(x_1) \geq 0$ таке, що

$$\begin{aligned} \alpha_2(x_1) \geq & k_2(x_1) + \left| \frac{dx_2^*}{dx_1} \right| (1 + k_1(x_1)) \\ = & k_2(x_1) + |2 + k_1(x_1) + x_1 k_1'(x_1)| (1 + k_1(x_1)). \end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} \left| \frac{dx_2^*}{dx_1} \right| (|x_2| + |x_1|k_1(x_1)) & \leq \left| \frac{dx_2^*}{dx_1} \right| (|x_1| + |x_2| + |x_1|k_1(x_1) + |x_2|k_1(x_1)) \\ & = \left| \frac{dx_2^*}{dx_1} \right| ((1 + k_1(x_1))(|x_1| + |x_2|)). \end{aligned}$$

Отже, маємо

$$\dot{V}_2 \leq -2x_1^2 + x_1(x_2 - x_2^*) + (x_2 - x_2^*)u + |x_2 - x_2^*|(|x_2| + |x_1|)\alpha_2(x_1).$$

Як бачимо, ми отримали вираз, з яким можна провести аналогічні дії,

що й з виразом з розділу 2.

Отже, скориставшись нерівністю

$$|x_2| \leq |x_2 - x_2^*| + |x_2^*| = |x_2 - x_2^*| + |x_1|(2 + k_1(x_1)),$$

отримаємо

$$\dot{V}_2 \leq -2x_1^2 + (x_2 - x_2^*)u + (x_2 - x_2^*)^2 \alpha_2(x_1) + |x_1||x_2 - x_2^*|((3 + k_1(x_1))\alpha_2(x_1) + 1).$$

Також використаємо нерівність

$$ab = (\sqrt{2}a) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}b \right) \leq \frac{1}{2} \left((\sqrt{2}a)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}b \right)^2 \right) = a^2 + \frac{1}{4}b^2$$

для будь-яких дійсних a та b . Приходимо до наступного

$$|x_1||x_2 - x_2^*|((3 + k_1(x_1))\alpha_2(x_1) + 1) \leq x_1^2 + \frac{1}{4}(x_2 - x_2^*)^2((3 + k_1(x_1))\alpha_2(x_1) + 1)^2.$$

Маємо оцінку

$$\dot{V}_2 \leq -x_1^2 + (x_2 - x_2^*)u + (x_2 - x_2^*)^2 \beta_2(x_1),$$

де функція $\beta_2(x_1) > 0$ — неперервна і така, що

$$\beta_2(x_1) \geq \alpha_2(x_1) + \frac{1}{4}((3 + k(x_1))\alpha_2(x_1) + 1)^2.$$

Виберемо керування $u = u(x_1, x_2)$, де

$$u(x_1, x_2) = -(x_2 - x_2^*)(1 + \beta_2(x_1)), \quad (4.3)$$

тоді отримуємо

$$\dot{V}_2|_{u=u(x_1, x_2)} \leq -x_1^2 - (x_2 - x_2^*)^2 < 0 \quad (4.4)$$

при $|x_1| + |x_2| \neq 0$.

Побудова спостерігача

Аналогічно до розділу 3, побудуємо спостерігач такого вигляду:

$$\dot{z} = u - \frac{dL(x_1)}{dx_1}(z + L(x_1) + f_1(x_1)),$$

де $L(x_1)$ — нелінійна функція, яка буде визначена пізніше.

Нехай $e = x_2 - L(x_1) - z$, тоді

$$\dot{e} = \dot{x}_2 - \frac{d}{dt}L(x_1) - \dot{z} = f_2(x_1, x_2) - \frac{dL(x_1)}{dx_1}e.$$

Введемо функцію Ляпунова таким чином $V_3 = \frac{1}{2}e^2$, тоді її похідна в силу відповідної системи має вигляд:

$$\dot{V}_3 = e\dot{e} = ef_2(x_1, x_2) - \frac{dL(x_1)}{dx_1}e^2.$$

Оцінимо $|ef_2(x_1, x_2)|$ за допомогою (4.2):

$$|ef_2(x_1, x_2)| \leq |e|(|x_1| + |x_2|)k_2(x_1).$$

Звідки випливає:

$$\dot{V}_3 \leq |e|(|x_1| + |x_2|)k_2(x_1) - \frac{dL(x_1)}{dx_1}e^2$$

або, враховуючи вигляд $x_2^* = -x_1(2 + k_1(x_1))$, отримуємо

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 &\leq |e|(|x_1| + |x_2 - x_2^*| + |x_2^*|)k_2(x_1) - \frac{dL(x_1)}{dx_1}e^2 \\ &= |e|(|x_2 - x_2^*| + |x_1|(3 + k_1(x_1)))k_2(x_1) - \frac{dL(x_1)}{dx_1}e^2. \end{aligned}$$

Отже,

$$\dot{V}_3 \leq |e|(|x_1| + |x_2 - x_2^*|)k_2^*(x_1) - \frac{dL(x_1)}{dx_1}e^2,$$

де $k_2^*(x_1) \geq 0$ — будь-яка неперервна функція така, що

$$k_2^*(x_1) \geq (3 + k_1(x_1))k_2(x_1).$$

Застосуємо нерівність $|ab| \leq \frac{1}{4}a^2 + b^2$ до $|x_1|(|e|k_2^*(x_1))$ та $|x_2 - x_2^*|(|e|k_2^*(x_1))$:

$$\dot{V}_3 \leq \frac{1}{4}(|x_1|^2 + |x_2 - x_2^*|^2) + 2(k_2^*(x_1))^2 e^2 - \frac{dL(x_1)}{dx_1} e^2.$$

Проведемо оцінку на $\dot{V}_2|_{u=u(x_1, L(x_1)+z)}$ так само, як і в розділі 3:

$$\dot{V}_2|_{u=u(x_1, L(x_1)+z)} \leq -x_1^2 - (x_2 - x_2^*)^2 + \frac{\partial V_2}{\partial x_2}(u(x_1, L(x_1) + z) - u(x_1, x_2))$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2|_{u=u(x_1, L(x_1)+z)} &\leq -x_1^2 - (x_2 - x_2^*)^2 + \\ &\quad (x_2 - x_2^*)(-(z + L(x_1) - x_2^*) + x_2 - x_2^*)(1 + \beta_2(x_1)) \end{aligned}$$

$$\dot{V}_2|_{u=u(x_1, L(x_1)+z)} \leq -x_1^2 - (x_2 - x_2^*)^2 + |x_2 - x_2^*||e|(1 + \beta_2(x_1)).$$

Використовуємо нерівність

$$|x_2 - x_2^*||e|(1 + \beta_2(x_1)) \leq \frac{1}{2}(x_2 - x_2^*)^2 + \frac{1}{2}e^2(1 + \beta_2(x_1))^2,$$

що дає:

$$\dot{V}_2|_{u=u(x_1, L(x_1)+z)} \leq -x_1^2 - \frac{1}{2}(x_2 - x_2^*)^2 + \frac{1}{2}e^2(1 + \beta_2(x_1))^2,$$

де $u(x_1, L(x_1) + z)$ задається (4.3).

Складемо $\dot{V}_3$ та $\dot{V}_2|_{u=u(x_1, L(x_1)+z)}$, що дає

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 + \dot{V}_2|_{u=u(x_1, L(x_1)+z)} &\leq -\frac{3}{4}x_1^2 - \frac{1}{4}(x_2 - x_2^*)^2 \\ &\quad - e^2 \left(\frac{dL(x_1)}{dx_1} - \frac{1}{2}(1 + \beta_2(x_1))^2 - 2(k_2^*(x_1))^2 \right). \end{aligned}$$

Визначимо $L(x_1)$ як

$$L(x_1) = \frac{1}{2}x_1 + \int_0^{x_1} \left(2(k_2^*(s))^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\beta_2(s)\right)^2 \right) ds.$$

Тоді

$$\dot{V}_3 + \dot{V}_2|_{u=u(x_1, L(x_1)+z)} \leq -\frac{3}{4}x_1^2 - \frac{1}{4}(x_2 - x_2^*)^2 - \frac{1}{2}e^2 < 0,$$

при $|x_1| + |x_2| + |z| \neq 0$.

Зазначимо, що $V_2 + V_3 > 0$, при $|x_1| + |x_2| + |z| \neq 0$, тому НТС системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = u(x_1, L(x_1) + z) + f_2(x_1, x_2), \\ \dot{z} = u(x_1, L(x_1) + z) - \frac{dL(x_1)}{dx_1}(z + L(x_1) + f_1(x_1)) \end{cases}$$

є глобально асимптотично стійкою. Стабілізуюче керування має вигляд

$$\begin{aligned} u(x_1, L(x_1) + z) = & -(z + L(x_1) - x_2^*)(1 + \beta_2(x_1)) = \\ & -\left(z + \frac{1}{2}x_1 + \int_0^{x_1} \left(2[k_2^*(s)]^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\beta_2(s)\right)^2 \right) ds + \right. \\ & \left. x_1 \left(2 + k_1(x_1) \right) \right) \left(1 + \beta_2(x_1) \right). \end{aligned}$$

Розділ 5

Числове моделювання

5.1. Приклад 1

Для побудови першого прикладу візьмемо $f_1(x) = x_1^2$. Тоді система виглядає як

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^2, \\ \dot{x}_2 = u, \\ y = x_1. \end{cases}$$

Щоб показати справедливись умови (1.2) для $f_1(x)$, візьмемо $k_1(x_1) = \frac{1}{2}(1 + x_1^2)$. Нагадаємо, що

$$|x_1| \leq \frac{1}{2}(1 + x_1^2).$$

Маємо

$$|f_1(x_1)| = |x_1||x_1| \leq |x_1|\frac{1}{2}(1 + x_1^2) = |x_1|k_1(x_1).$$

Неважко обчислити наступні величини:

$$|2 + k_1(x_1) + x_1 k'_1(x_1)| (1 + k_1(x_1)) = \frac{1}{4}(3x_1^2 + 5)(x_1^2 + 3),$$

$$\beta_1(x_1) = \frac{1}{4}(3x_1^2 + 5)(x_1^2 + 3) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{8}(7 + x_1^2)(3x_1^2 + 5)(x_1^2 + 3) + 1 \right)^2.$$

$$L(x_1) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2} \int_0^{x_1} (1 + \beta_1(s))^2 ds,$$

$$L(x_1) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2} \int_0^{x_1} \left(1 + \frac{1}{4}(3s^2 + 5)(s^2 + 3) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}(3 + s)(3s^2 + 5)(s^2 + 3) + 1 \right)^2 \right) ds.$$

Випишемо стабілізуюче керування

$$u_1(x_1, z) = - \left(z + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2} \int_0^{x_1} \left(1 + \frac{1}{4}(3s^2 + 5)(s^2 + 3) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}(3 + s)(3s^2 + 5)(s^2 + 3) + 1 \right)^2 \right) ds + \frac{1}{2}x_1(5 + x_1^2) \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}(3x_1^2 + 5)(x_1^2 + 3) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}(3 + x_1)(3x_1^2 + 5)(x_1^2 + 3) + 1 \right)^2 \right).$$

Для одного і того ж набору значень $\{x_1(0), x_2(0)\}$ побудуємо графіки траєкторій системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^2, \\ \dot{x}_2 = u_1(x_1, z), \\ \dot{z} = u_1(x_1, z) - \frac{dL(x_1)}{dx_1}(z + L(x_1) + x_1^2) \end{cases}$$

для різних значень $z(0)$. Відповідні початкові точки $(x_1(0); x_2(0); z(0))$ вказані під рисунками. На цих рисунках видно, що відповідні розв'язки $x_1(t)$ та $x_2(t)$ прямують до 0 при зростанні t для різних значень $z(0)$.

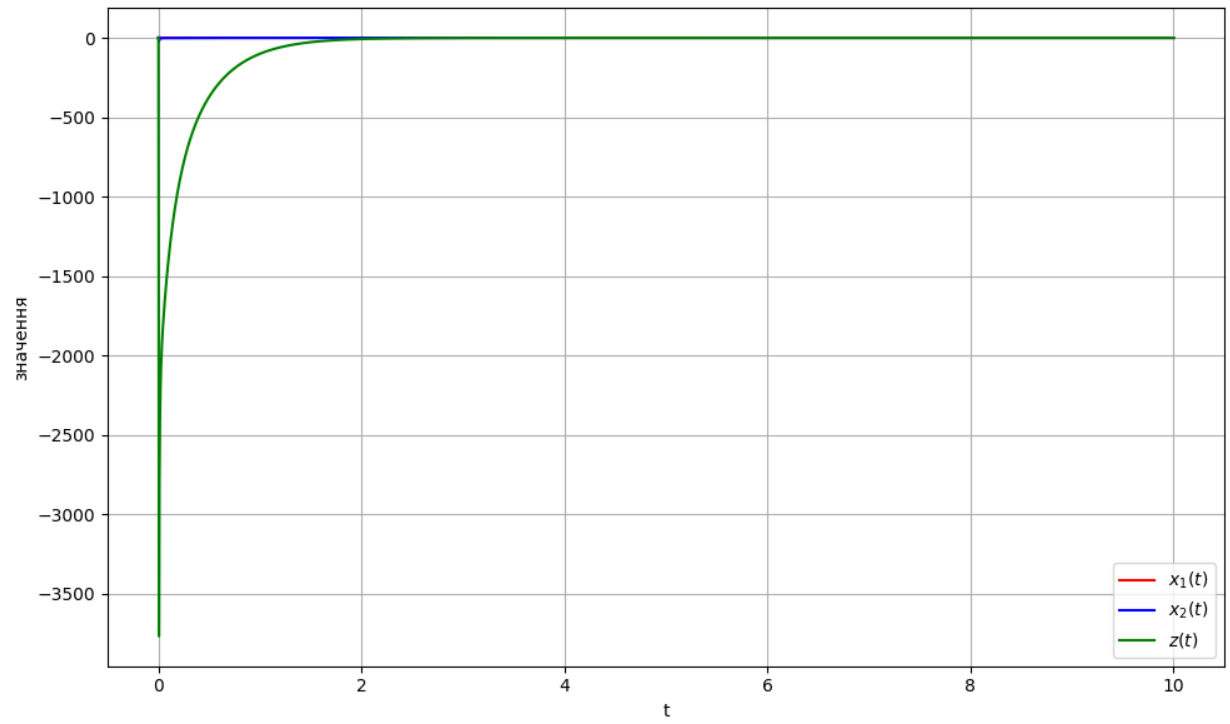


Рис. 5.1: $(x_1(0); x_2(0); z(0)) = (1; 1; 1)$

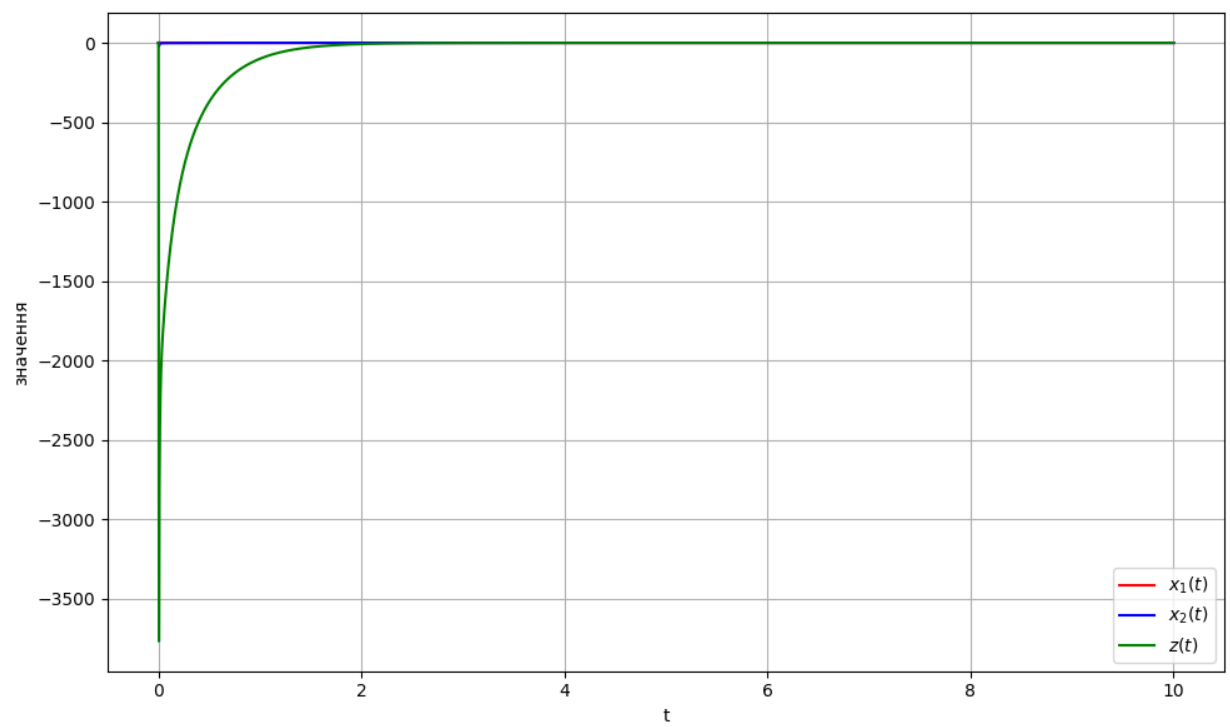
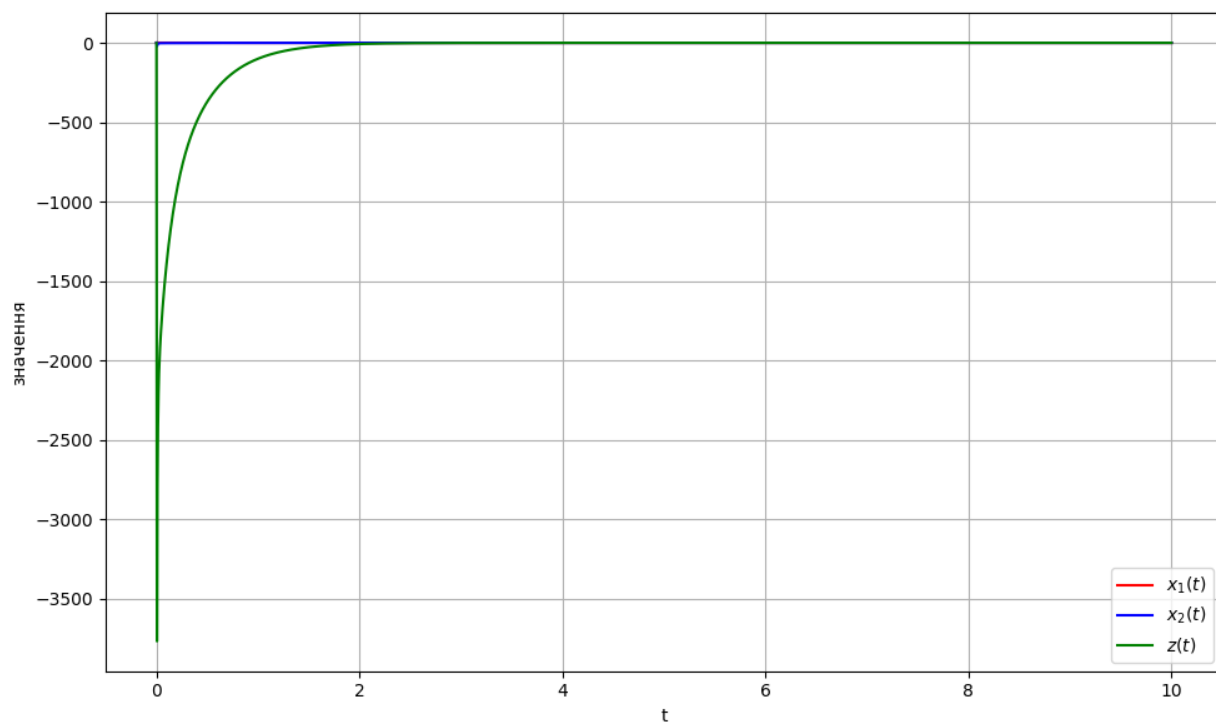
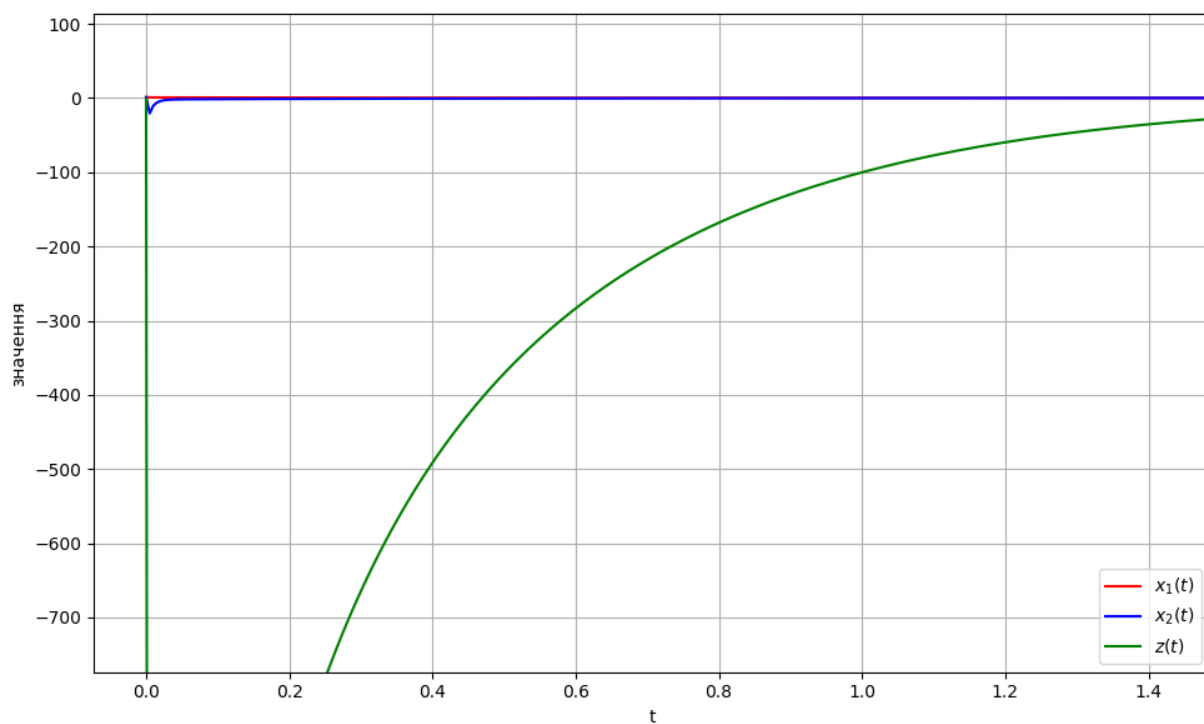


Рис. 5.2: $(x_1(0); x_2(0); z(0)) = (1; 1; 0)$

Рис. 5.3: $(x_1(0); x_2(0); z(0)) = (1; 1; -1)$ Рис. 5.4: $(x_1(0); x_2(0); z(0)) = (1; 1; -1)$

На рисунках можемо побачити, що траєкторія $z(t)$, хоча і зазнає велике відхилення спочатку, прямує до 0 при різних початкових значеннях $z(0)$.

5.2. Приклад 2

Ускладнимо систему з попереднього прикладу, додавши в праву частину другого рівняння $f_2(x) = x_1 x_2 \sin(x_1 + x_2)$. Тоді система виглядає як

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^2, \\ \dot{x}_2 = u + x_1 x_2 \sin(x_1 + x_2), \\ y = x_1. \end{cases}$$

Як і в першому прикладі, візьмемо $k_1(x_1) = \frac{1}{2}(1 + x_1^2)$. Щоб показати справедливись умови (4.2) для $f_2(x)$, візьмемо $k_2(x_1) = \sqrt{x_1^2 + 1}$. Тоді:

$$\begin{aligned} |f_2(x_1, x_2)| &= x_1 x_2 \sin(x_1 + x_2) \leq |x_1| |x_2| \\ &\leq |x_2| \sqrt{x_1^2 + 1} \leq (|x_1| + |x_2|) \sqrt{x_1^2 + 1}. \end{aligned}$$

Неважко обчислити наступні величини:

$$\begin{aligned} \alpha_2(x_1) &= k_2(x_1) + |2 + k_1(x_1) + x_1 k_1'(x_1)| (1 + k_1(x_1)) \\ &= \sqrt{x_1^2 + 1} + \frac{1}{4}(3x_1^2 + 5)(x_1^2 + 3), \end{aligned}$$

$$\beta_2(x_1) = \alpha_2(x_1) + \frac{1}{4}((3 + k_1(x_1))\alpha_2(x_1) + 1)^2,$$

$$\begin{aligned} \beta_2(x_1) &= \sqrt{x_1^2 + 1} + \frac{1}{4}(3x_1^2 + 5)(x_1^2 + 3) + \frac{1}{4}((3 + k_1(x_1))\sqrt{x_1^2 + 1} \\ &\quad + \frac{1}{4}(3 + k_1(x_1))(3x_1^2 + 5)(x_1^2 + 3) + 1)^2, \end{aligned}$$

$$k_2^*(x_1) = (3 + k_1(x_1))k_2(x_1) = \left(3 + \frac{1}{2}(1 + x_1^2)\right) \left(\sqrt{x_1^2 + 1}\right),$$

$$L(x_1) = \frac{1}{2}x_1 + \int_0^{x_1} \left(2(k_2^*(s))^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\beta_2(s)\right)^2 \right) ds.$$

Отже,

$$\begin{aligned} L(x_1) = & \frac{1}{2}x_1 + \int_0^{x_1} \left(2 \left[\left(3 + \frac{1}{2}(1 + s^2) \right) \sqrt{s^2 + 1} \right]^2 \right. \\ & + \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{s^2 + 1} + \frac{1}{8}(3s^2 + 5)(s^2 + 3) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{8} \left[(3 + k_1(s))\sqrt{s^2 + 1} + \frac{1}{4}(3 + k_1(s))(3s^2 + 5)(s^2 + 3) + 1 \right]^2 \right)^2 \right) ds. \end{aligned}$$

Випишемо стабілізуюче керування

$$\begin{aligned} u(x_1, L(x_1) + z) = & - \left(z + \frac{1}{2}x_1 + \int_0^{x_1} \left(2 \left[\left(3 + \frac{1}{2}(1 + s^2) \right) \sqrt{s^2 + 1} \right]^2 \right. \right. \\ & + \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{s^2 + 1} + \frac{1}{8}(3s^2 + 5)(s^2 + 3) \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{8} \left[(3 + k_1(s))\sqrt{s^2 + 1} + \frac{1}{4}(3 + k_1(s))(3s^2 + 5)(s^2 + 3) + 1 \right]^2 \right)^2 \right) ds \\ & + x_1 \left(2 + k_1(x_1) \right) \Bigg) \left(1 + \sqrt{x_1^2 + 1} + \frac{1}{4}(3x_1^2 + 5)(x_1^2 + 3) \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \left[(3 + k_1(x_1))\sqrt{x_1^2 + 1} + \frac{1}{4}(3 + k_1(x_1))(3x_1^2 + 5)(x_1^2 + 3) + 1 \right]^2 \right). \end{aligned}$$

Для початкової точки $(x_1(0); x_2(0); z(0))$, що вказана під рисунками, побудуємо графіки траєкторій системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^2, \\ \dot{x}_2 = u_1(x_1, z) + x_1 x_2 \sin(x_1 + x_2), \\ \dot{z} = u_1(x_1, z) - \frac{dL(x_1)}{dx_1} (z + L(x_1) + x_1^2) \end{cases}$$

для різних значень $z(0)$.

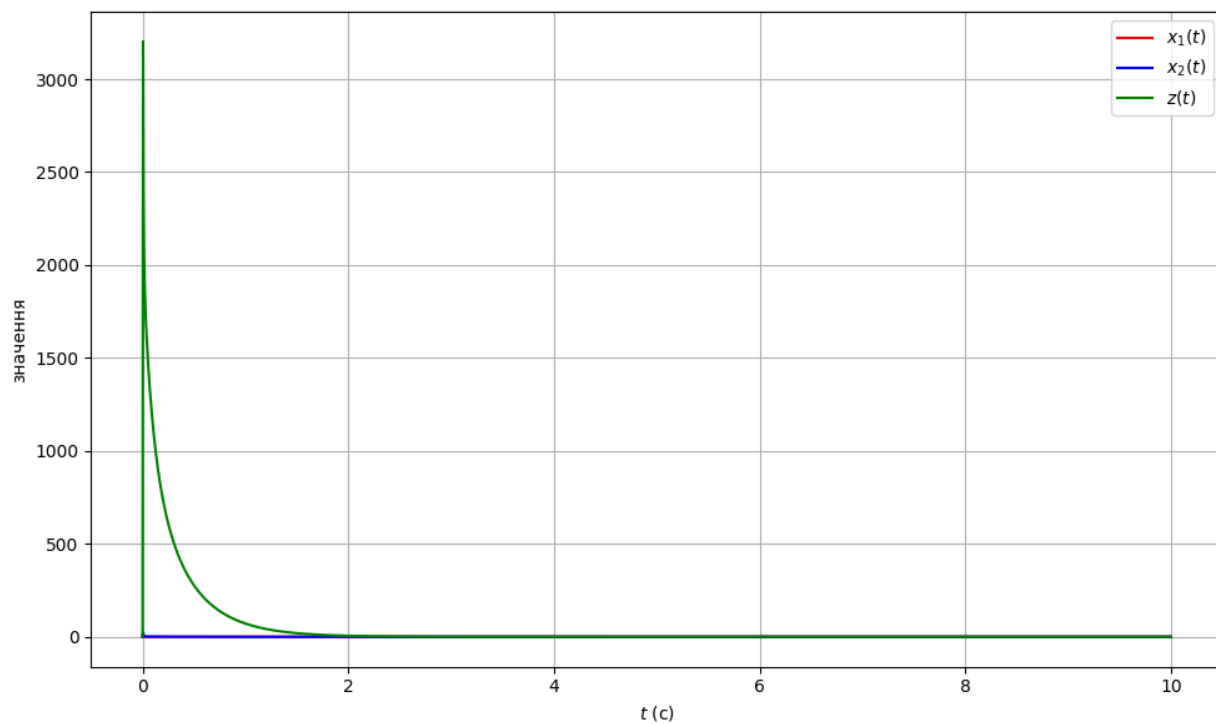


Рис. 5.5: $(x_1(0); x_2(0); z(0)) = (-1; 1; 1)$

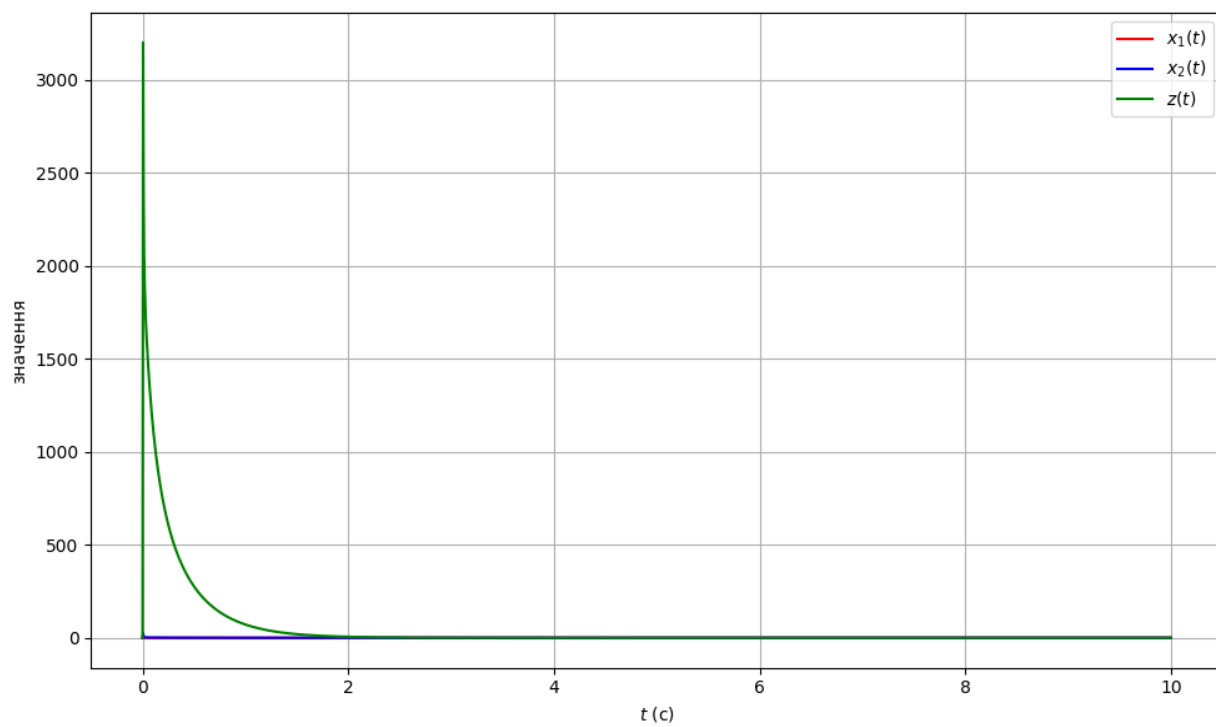


Рис. 5.6: $(x_1(0); x_2(0); z(0)) = (-1; 1; 0)$

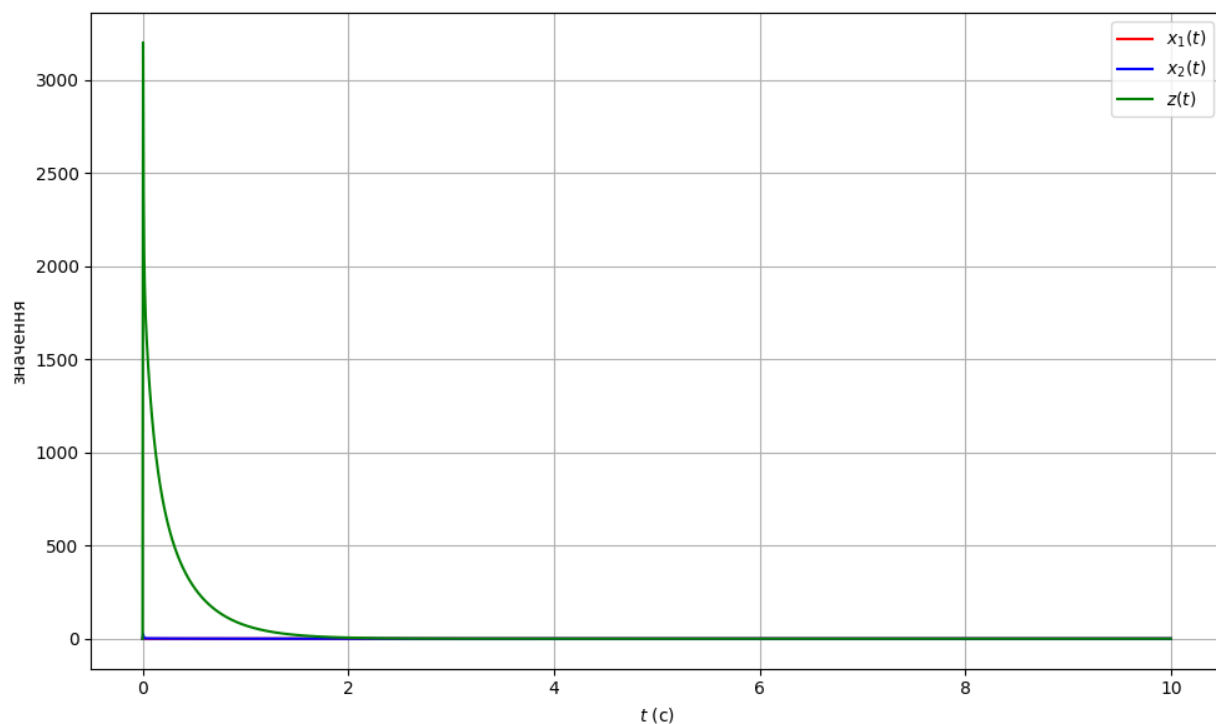


Рис. 5.7: $(x_1(0); x_2(0); z(0)) = (-1; 1; -1)$

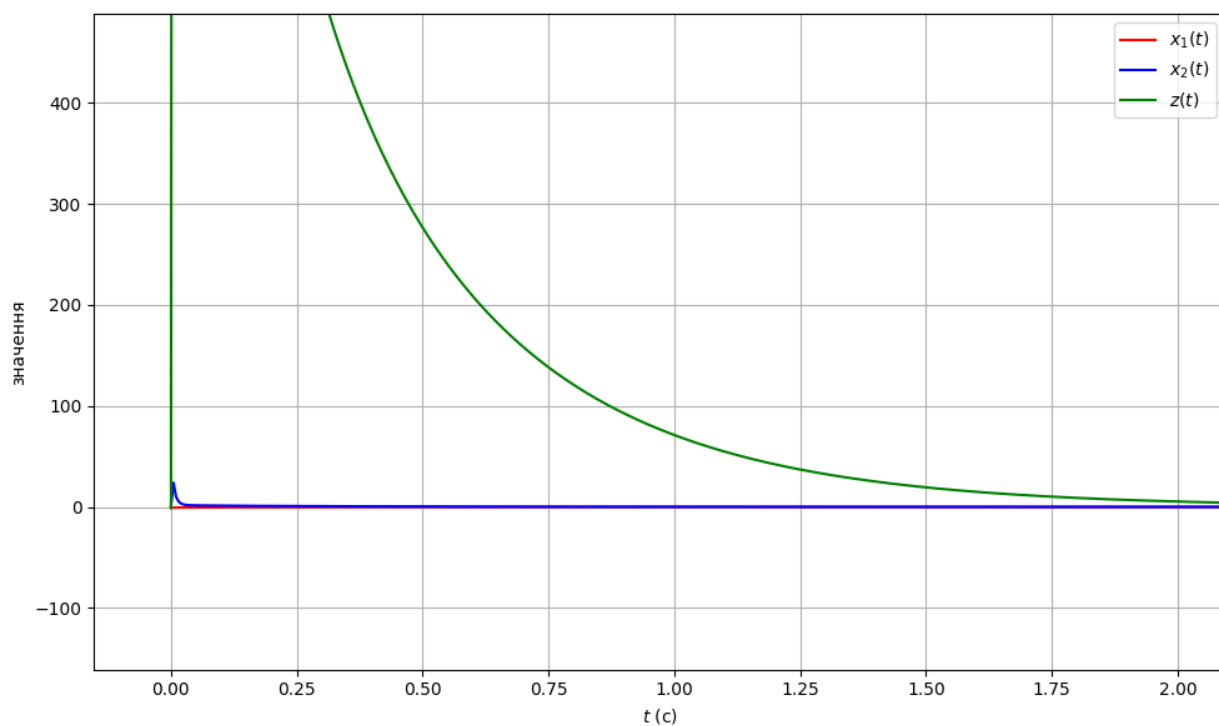


Рис. 5.8: $(x_1(0); x_2(0); z(0)) = (-1; 1; -1)$

Видно, що траєкторія $z(t)$ має велике відхилення на початку, але швидко стабілізується і прямує до 0 при різних початкових значеннях $z(0)$.

Висновки

У даній роботі було проведено дослідження двовимірної нелінійної системи з виходом та розроблено закон керування, що залежить тільки від вимірюваного стану та забезпечує асимптотичну стійкість нульової точки спокою системи. Для оцінки невимірюваного стану системи побудовано спостерігач. Підхід, що використано в цій роботі, може бути застосовано для дослідження більш широкого класу нелінійних систем. Теоретичні результати підтверджені чисельним моделюванням.

Список використаних джерел

- [1] Khalil N.K. Nonlinear Systems. Prentice Hall, New York, 2002.
- [2] Krstic M. Kanellakopoulos I., Kokotovic P.V. Nonlinear and Adaptive Control Design, New York: Wiley, 1995.
- [3] Bebiya M. O., Korobov V. I. On Stabilization Problem for Nonlinear Systems With Power Principal Part. Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry, 2016, Vol. 12, No. 2, P. 113-133 doi:10.15407/mag12.02.113.
- [4] Bebiya M. O. Global Synthesis of Bounded Controls for Systems With Power Nonlinearity. Visnyk of V. N. Karazin Kharkiv National University. Ser. Mathematics, Applied Mathematics and Mechanics, 2015, Vol. 81, No. 1, P. 36-51 doi:10.26565/2221-5646-2015-81-04.
- [5] Korobov V.I., Bebiya M.O. Stabilization of one class of nonlinear systems. Automation and Remote Control, 2017, Vol. 78, No. 1, P. 1–15 .
- [6] Qian, Chunjiang and Wei Lin. Smooth output feedback stabilization of planar systems without controllable/observable linearization. IEEE Trans. Autom. Control. 2002, Vol. 47, P. 2068-2073.